Devoir Maison 3

Pour le 3 novembre 2025

Exercice 1

(*D'après Ecricome 2020*)

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels. Si la série numérique de terme général u_n converge, on dit qu'elle converge à l'ordre 1 et on note alors $(R_{1,n})_{n\geqslant 0}$ la suite de restes de cette série, autrement dit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad R_{1,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

Si à nouveau la série de terme général $R_{1,n}$ converge, on dit que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge à l'ordre 2 et on note $R_{2,n}$ la suite de reste de cette série, autrement dit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad R_{2,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{1,k}$$

Plus généralement, pour tout entier $p \geqslant 2$, si la série de terme général $R_{p-1,n}$ converge, on dit que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge à l'ordre p et on note alors $(R_{p,n})_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de restes de cette série :

$$R_{p,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{p-1,k}$$

On peut noter : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_{0,n} = u_n$ Le but de cet exercice est d'étudier, sur certains exemples, l'ordre de la convergence de la série de terme général u_n.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère, dans cette question seulement, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$
   (a) Rappeler la condition nécessaire et suffisante sous laquelle $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

   On se place désormais sous cette condition.

   (b) Pour tout entier $k \geqslant 2$, justifier que
   $$\int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$$
   (c) En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$
   $$\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leqslant R_{1,n} \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$$
   (d) En déduire que
   $$R_{1,n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$
   (e) Sous quelle condition nécessaire et suffisante sur α la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge-t-elle à l'ordre 2 ?

   (f) Conjecturer à quel ordre la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

2. On considère, dans cette question seulement, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{n^n}$
   (a) Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

(b) Montrer que, pour tout $k \geqslant 3$, $u_k \leqslant \dfrac{1}{3^k}$, puis en déduire que, pour tout $n \geqslant 2$

$$0 \leqslant R_{1,n} \leqslant \frac{1}{2.3^n}$$

(c) En déduire que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge à l'ordre 2 et que, pour tout $n \geqslant 1$

$$0 \leqslant R_{2,n} \leqslant \frac{1}{4.3^n}$$

(d) Montrer que, pour tout $p \geqslant 2$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge à l'ordre p et que, pour tout $n \geqslant 1$

$$0 \leqslant R_{p,n} \leqslant \frac{1}{2^p.3^n}$$

(e) La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} R_{n,n}$ converge-t-elle ?

3. On considère, dans cette question seulement, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$

(a) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

(b) Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t = 0$$

(c) Soit $N \in \mathbb{N}$, en remarquant que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{k+1} = \displaystyle\int_0^1 t^k\,\mathrm{d}t$, montrer que

$$\sum_{n=0}^{N} u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

(d) En déduire que, pour tout $n \geqslant 0$

$$R_{1,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

(e) Montrer par récurrence que, pour tout entier $p \geqslant 1$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge à l'ordre p et que, pour tout $n \geqslant 0$

$$R_{p,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+p}}{(1+t)^p}\,\mathrm{d}t$$

Corrigé

Corrigé de l'exercice 1

1. (a) $\boxed{\text{La série de Riemann } \sum_{n\geqslant 1} u_n \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1.}$

   (b) Soit $k \geqslant 2$,

   Pour tout $t \in [k, k+1]$ on a $t \geqslant k$, d'où, puisque $\alpha > 0$, $\frac{1}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha}$

   Par croissance de l'intégrale on en déduit que

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

   C'est-à-dire

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k^\alpha}(k+1-k)$$

   ou encore

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k^\alpha}$$

   De même, pour $t \in [k-1, k]$ on a $t \leqslant k$, d'où, puisque $\alpha > 0$, $\frac{1}{t^\alpha} \geqslant \frac{1}{k^\alpha}$

   Par croissance de l'intégrale on en déduit que

$$\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

   C'est-à-dire

$$\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{k^\alpha}$$

   Finalement on a bien

$$\boxed{\int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t}$$

   (c) Soit $n \geqslant 1$, on sait que les intégrales $\int_n^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ et $\int_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ sont des intégrales de Riemann convergentes.

   D'après la relation de Chasles, on en déduit que les séries $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_{k}^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ convergent et que

   Remarque

   Avant de faire une somme infinie d'inégalités, il est bon de vérifier que toutes les séries concernées convergent bien

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \int_n^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$$

   et

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \int_n^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

   En sommant les relations obtenues à la question précédente, on a alors

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

   C'est-à-dire

$$\boxed{\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leqslant R_{1,n} \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}}$$

(d) On sait que

$$\forall n \geqslant 1, \qquad \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leqslant R_{1,n} \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

Or $\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$ Ainsi, d'après le théorème de construction des équivalents par encadrements,

$$\boxed{R_{1,n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}}$$

(e) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a $R_{1,n} > 0$ en tant que somme de réels strictement positifs.

D'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, les séries de terme général respectifs $R_{1,n}$ et $\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$ sont de même nature.

La série de terme général $\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$ est une série de Riemann qui converge si et seulement si $\alpha - 1 > 1$, i.e. $\alpha > 2$.

Ainsi

$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1} u_n \text{ converge à l'ordre 2 si et seulement si } \alpha > 2}$

(f) On a vu que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge à l'ordre 1 si et seulement si $\alpha > 1$ et qu'elle à l'ordre 2 si et seulement si $\alpha > 2$.

On conjecture alors qu'elle converge à l'ordre $p \in \mathbb{N}^*$ si et seulement si $\alpha > p$.

En d'autres termes, on conjecture que

$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1} u_n \text{ converge à tous les ordres } p \text{ tels que } p < \alpha.}$

2. On considère, dans cette question seulement, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n^n}$

(a) Pour $n \geqslant 2$ on a $n^n \geqslant n^2$ et donc

$$\forall n \geqslant 2, \qquad 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n^2}$$

La série de terme général $\frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, ainsi, d'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs,

$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1} u_n \text{ converge.}}$

(b) Soit $k \geqslant 3$, on a alors $k\ln(k) \geqslant k\ln(3)$, d'où $k^k \geqslant k^3$ et ainsi

$$\boxed{\forall k \geqslant 3, \qquad 0 \leqslant u_k \leqslant \frac{1}{3^k}}$$

Remarque

Cette inégalité prouve par ailleurs aussi que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge par comparaison à une série géométrique convergente.

Les séries de terme général respectifs u_k et $\frac{1}{3^k}$ convergent. En sommant les inégalités obtenus on a alors, pour $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{3^k}$$

Or

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{3^k} &= \sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{3^{i+n+1}}\\ &= \frac{1}{3^{n+1}}\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^i\\ &= \frac{1}{3^{n+1}}\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\\ &= \frac{1}{3^{n+1}}\frac{3}{2}\\ &= \frac{1}{2.3^n}\end{aligned}$$

On pose le changement d'indice $i = k - n - 1$

On a donc bien

$$\boxed{0 \leqslant R_{1,n} \leqslant \frac{1}{2.3^n}}$$

(c) La série de terme général $\frac{1}{2}\frac{1}{3^n}$ est convergente en tant que série géométrique (multipliée par une constante) de raison $\frac{1}{3} \in]-1,1[$. Ainsi, d'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1} R_{1,n}$ converge. En d'autres termes

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1} u_n \text{ converge à l'ordre 2.}}$$

De plus, en sommant les inégalités on a, pour $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{1,k} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{2}\frac{1}{3^k}$$

Or $\sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{1,k} = R_{2,n}$ et $\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{2}\frac{1}{3^k} = \frac{1}{4.3^n}$. Ainsi

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \qquad 0 \leqslant R_{2,n} \leqslant \frac{1}{4.3^n}}$$

(d) On va procéder par récurrence sur p.

Plus précisément notons $\mathcal{A}(p)$ l'assertion

« La série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge à l'ordre p et, pour tout $n \geqslant 1$, $0 \leqslant R_{p,n} \leqslant \frac{1}{2^p.3^n}$

On a déjà montré que l'assertion est vraie pour $p = 1$ et $p = 2$.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, on suppose que l'assertion $\mathcal{A}(p)$ est vraie.

On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \leqslant R_{p,n} \leqslant \frac{1}{2^p.3^n}$$

La série de terme général $\frac{1}{2^p}\frac{1}{3^n}$ est convergente en tant que série géométrique (multipliée par une constante) de raison $\frac{1}{3} \in]-1,1[$. Ainsi, d'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1} R_{p,n}$ converge. En d'autres termes la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge à l'ordre $p+1$.

De plus, en sommant les inégalités on a, pour $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{p,k} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^p}\frac{1}{3^k}$$

Or $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{p,k} = R_{p+1,n}$ et $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^p}\frac{1}{3^k} = \frac{1}{2^p}\frac{1}{2.3^n} = \frac{1}{2^{p+1}3^n}$. Ainsi

$$\forall n \geqslant 1, \qquad 0 \leqslant R_{p+1,n} \leqslant \frac{1}{2^{p+1}3^n}$$

Ce qui prouve l'assertion au rang $n+1$ et achève la récurrence.

En conclusion

$\boxed{\text{Pour tout entier } p \geqslant 1, \text{ la série } \sum_{n\geqslant 1} u_n \text{ converge à l'ordre } p \text{ et}}$

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \qquad 0 \leqslant R_{p,n} \leqslant \frac{1}{2^p.3^n}}$$

(e) D'après la question précédente on a, pour tout $n \geqslant 1$, $0 \leqslant R_{n,n} \leqslant \dfrac{1}{2^n 3^n}$, c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \leqslant R_{n,n} \leqslant \frac{1}{6^n}$$

La série de terme général $\dfrac{1}{6^n}$ est convergente en tant que série géométrique de raison $\dfrac{1}{6} \in]-1,1[$. Ainsi, d'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} R_{n,n} \text{ converge.}}$

3. (a) Pour $n \in \mathbb{N}$ on a $\dfrac{(-1)^n}{n+1}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n+2} = \dfrac{-1}{(n+1)(n+2)} < 0$

De plus, la suite $\left(\left|\dfrac{(-1)^n}{n+1}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\dfrac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0.

Ainsi, d'après le critère des séries alternées, $\boxed{\sum u_n \text{ converge}}$.

(b) Pour $t \in [0,1]$ on a $1+t \geqslant 1$ ainsi

$$\forall t \in [0,1], \qquad 0 \leqslant \frac{t^n}{1+t} \leqslant t^n$$

D'où, par croissance de l'intégrale

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t$$

C'est-à-dire

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n+1}$$

D'après le théorème des gendarmes, on a ainsi

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t}$$

(c) Soit $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} u_n &= \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \int_0^1 t^n \, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{N} (-1)^n t^n \, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{1-(-t)^{N+1}}{1+t} \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+t} \, \mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t} \mathrm{d}t\end{aligned}$$

On a donc bien

$$\boxed{\sum_{n=0}^{N} u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t} \, \mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t} \, \mathrm{d}t}$$

(d) On sait, d'après la question 3.(a) que la suite $\left(\int_0^1 \frac{t^{N+1}}{1+t} \, \mathrm{d}t\right)_{N \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 ainsi, d'après la question 3.(b) la suite $\left(\sum_{n=0}^{N} u_n\right)_{N \in \mathbb{N}}$ converge vers $\int_0^1 \frac{1}{1+t} \, \mathrm{d}t = \ln(2)$.

En d'autres termes $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t} \, \mathrm{d}t = \ln(2)}$

Pour $n \in \mathbb{N}$ on a alors

$$\begin{aligned}R_{1,n} &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+t} \, \mathrm{d}t - \left(\int_0^1 \frac{1}{1+t} \, \mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} \, \mathrm{d}t\right) \\ &= \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} \, \mathrm{d}t\end{aligned}$$

On a donc bien

$$\boxed{\forall n \geqslant 0, \qquad R_{1,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} \, \mathrm{d}t}$$

(e) Pour $p \geqslant 1$, on définit l'assertion $\mathcal{A}(p)$

« La série $\sum_{n \geqslant 0} u_p$ converge à l'ordre p et, pour tout $n \geqslant 0$, $R_{p,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+p}}{(1+t)^p} \, \mathrm{d}t$ »

La question précédente nous assure que l'assertion $\mathcal{A}(1)$ est vérifiée.

Soit $p \geqslant 1$, on suppose que l'assertion $\mathcal{A}(p)$ est vérifiée.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on a alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} R_{p,k} &= \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 \frac{(-1)^{k+p}}{1+t)^p}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \frac{(-t)^{k+p}}{(1+t)^p}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{(-t)^p}{(1+t)^p} \sum_{k=0}^{n} (-t)^k\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{(-t)^p}{(1+t)^p} \frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{(-t)^p}{(1+t)^{p+1}} - \frac{(-t)^{n+1+p}}{1+t)^{p+1}}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{(-t)^p}{(1+t)^{p+1}}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1+p}}{1+t)^{p+1}}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{(-t)^p}{(1+t)^{p+1}}\,\mathrm{d}t + (-1)^{n+p} \int_0^1 \frac{t^{n+1+p}}{1+t)^{p+1}}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Pour $t \in [0,1]$ on a $1+t \geqslant 1$ ainsi $(1+t)^p \geqslant 1$ et donc

$$\forall t \in [0,1], \qquad 0 \leqslant \frac{t^{n+1+p}}{1+t)^{p+1}} \leqslant t^{n+1+p}$$

Par croissance de l'intégrale on en déduit que

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^{n+1+p}}{(1+t)^{p+1}}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n+p+2}$$

Le théorème des gendarmes nous assure alors que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^{n+1+p}}{(1+t)^{p+1}}\,\mathrm{d}t = 0$

On en déduit donc que la série de terme général $R_{p,k}$ converge et que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} R_{p,k} = \int_0^1 \frac{t^{n+1+p}}{(1+t)^{p+1}}\,\mathrm{d}t$$

Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
R_{p+1,n} &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{p,k} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} R_{p,k} - \sum_{k=0}^{n} R_{p,k} \\
&= \int_0^1 \frac{t^{n+1+p}}{1+t)^{p+1}}\,\mathrm{d}t - \left(\int_0^1 \frac{(-t)^p}{1+t)^p+1}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1+p}}{1+t)^{p+1}}\,\mathrm{d}t \right) \\
&= \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1+p}}{1+t)^{p+1}}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

On a ainsi prouvé que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge à l'ordre $p+1$ et que, pour tout $n \geqslant 0$, $\displaystyle R_{p+1,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1+p}}{1+t)^{p+1}}\,\mathrm{d}t$. En d'autres termes on a prouvé l'assertion $\mathcal{A}(p+1)$.

Par principe de récurrence, on en conclut alors que

$$\boxed{\text{Pour tout entier } p \text{, la série } \sum_{n\geqslant 0} u_n \text{ converge à l'ordre } p \text{ et, pour tout } n \geqslant 0,\ R_{p,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+p}}{1+t)^{p+1}}\,\mathrm{d}t}$$